INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

AVRIL 2001

Option **A.** – **MATHÉMATIQUES**

première composition de mathématiques

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comprend 4 pages (y compris celle-ci)

Tournez la page S.V.P.

L'objet du problème est de définir une généralisation de la notion d'inverse d'une application linéaire ou d'une matrice.

Dans la première partie, on établit une généralisation de la notion pour une application linéaire quelconque. Dans la deuxième partie, on se place dans le cadre des espaces $\mathbb{R}^n$ euclidiens. On définit alors la notion de pseudo-inverse.

Dans la troisième partie, on étudie le cas d'un système linéaire, ce qui permet de définir la notion de pseudo-solution, et de calculer la pseudo-inverse d'une matrice.

Dans la quatrième partie, on utilise la matrice $A'A$ pour obtenir la pseudo-inverse d'une autre façon.

PARTIE I

Soit E, et F deux espaces vectoriels de dimensions quelconques non nécessairement finies, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Soit E' un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ et F' un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$.
   a. Prouver que u définit un isomorphisme de E' sur $\operatorname{Im} u$.
   b. Soit $y \in F$. Prouver qu'il existe un couple unique $(x', y') \in E' \times F'$ tel que $y = u(x') + y'$.
   On pose $x' = v(y)$.

2. *a.* Prouver que l'on définit ainsi une application linéaire $v \in \mathcal{L}(F, E)$.
   b. Que dire lorsque u est un isomorphisme ?

3. Déterminer $\operatorname{Ker} v$, $\operatorname{Im} v$ et prouver que $uvu = u$ et que $vuv = v$.

4. Prouver que uv et vu sont des projecteurs dont on précisera le noyau et l'image.

5. Prouver que réciproquement si $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifie :
$$uvu = u \quad \text{et} \quad vuv = v,$$
alors on a :
$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v \quad \text{et} \quad F = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} v.$$

6. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique (e_1, e_2), et l'on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $E' = \operatorname{Vect}\langle te_1 + e_2 \rangle$ et $F' = \operatorname{Vect}\langle e_1 + te_2 \rangle$ où $t \in \mathbb{R}$.
   Déterminer dans ce cas l'endomorphisme v de $\mathbb{R}^2$ défini aux questions précédentes.
   On pourra déterminer v par sa matrice dans la base canonique.

Désormais, et pour toute la suite du problème, on prend $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, que l'on munit de leur produit scalaire usuel qu'on notera $(\ |\ )$.

PARTIE II

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.
   a. Justifier l'existence d'une unique application linéaire $u^- \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que :
$$\operatorname{Ker} u^- = (\operatorname{Im} u)^\perp, \quad \operatorname{Im} u^- = (\operatorname{Ker} u)^\perp \quad uu^-u = u, \quad u^-uu^- = u^-.$$
   On nommera cette application la pseudo-inverse de u.
   b. Préciser $(u^-)^-$.
   c. Prouver que uu^- et u^-u sont des projecteurs autoadjoints.

2. Soit réciproquement $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $uvu = u$, $vuv = v$, et tel que uv et vu soient des projecteurs autoadjoints.

   a. Montrer que $\text{Ker } vu = \text{Ker } u$ et $\text{Im } vu = \text{Im } v$.

   b. En déduire que $v = u^-$.

$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ étant rapportés à leur base canonique, soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, l'application linéaire de matrice A dans ces bases. On note A^- la matrice associée à l'application linéaire u^-.

3. Prouver que A^- est caractérisée par les égalités :

$$A^-AA^- = A^-, \quad AA^-A = A, \quad {}^t(AA^-) = AA^-, \quad {}^t(A^-A) = A^-A.$$

4. Déterminer $({}^tA)^-$ en fonction de A^-.

5. Déterminer A^- pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de la forme $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $A' \in GL_r(\mathbb{R})$ est une matrice carrée inversible de taille r.

PARTIE III

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ deux matrices colonnes. On s'intéresse au système :

$$(S) \qquad AX = Y.$$

Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ étant rapportés à leur base canonique, A définit une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$; les colonnes X, Y étant associées à des vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$.

On dit que X est la pseudo-solution du système (S) si l'on a $X = A^-Y$.

1. Dans cette question, on considère le cas particulier :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{2}}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3\sqrt{2}}{5} & \frac{3\sqrt{2}}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 13 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   a. Justifier que le système (S) n'admet pas de solution.

   b. Déterminer $\text{Ker } A$, $\text{Im } A$ puis le projeté orthogonal du vecteur Y sur $\text{Im } A$. En déduire la pseudo-solution de ce système. On sera amené à déterminer les antécédents par A du vecteur $(7, -1, 10)$.

2. Prouver que si $Y \in \text{Im } A$, la pseudo-solution de (S) est une solution de (S).

3. *a.* Prouver que si X est la pseudo-solution du système (S), alors X est une solution du système :

$$(S_1) \qquad AX = Y'$$

   où $Y' = JY$, J étant la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\text{Im } A$.

   b. Prouver que X est la pseudo-solution du système (S) si et seulement si il existe une solution Z du système :

$$(S_2) \qquad {}^tAZ = Y'$$

   telle que $X = {}^tAZ$.

   On cherche maintenant une solution du système :

$$(S_2) \qquad {}^tAZ = Y'$$

Tournez la page S.V.P.

4. Prouver qu'il existe une matrice de passage $P \in GL_p(\mathbb{R})$, telle que le système (S_2) soit équivalent au système S_3 :

$$(S_3) \quad \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1' \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $r = \text{rg } A$, B' étant une matrice carrée de taille r inversible et $Y_1', Z_1' \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, $Z_2' \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$,

$$Z = P \begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = P \begin{pmatrix} Y_1' \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Donner une expression de X à l'aide de A, P, B', Y_1' et Z_2'.

6. Justifier que X ne dépend pas de Z_2'.

7. En déduire que :

$$A^- = {}^tAPB^-P^{-1},$$

où $B = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. On suppose P et P^{-1} décomposées par blocs sous la forme $P = (P_1\ P_2)$ où $P_1 \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ où $Q_1 \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$. Déterminer A^- à l'aide de P_1, Q_1, B' et ${}^tA$.

PARTIE IV

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que ${}^tAA$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On note S l'ensemble des valeurs propres non nulles de ${}^tAA$, et P_λ la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le sous-espace propre associé à $\lambda \in S$; on pose $A_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} AP_\lambda$.

2. *a.* Prouver que ${}^tAA = \sum_{\lambda \in S} \lambda P_\lambda$.

b. Prouver que $A^-A = \sum_S P_\lambda$.

c. Puis que $A = \sum_S \sqrt{\lambda}\, A_\lambda$.

3. *a.* Calculer ${}^tA_\lambda A_\lambda$. En déduire A_λ^- en fonction ${}^tA_\lambda$. (On pourra utiliser la caractérisation obtenue à la question II.3).

b. Prouver que ${}^tA_\lambda A_\mu = A_\lambda {}^tA_\mu = 0$ pour $\lambda \neq \mu$.

4. Déduire des questions précédentes :

$$A^- = \sum_S \frac{1}{\sqrt{\lambda}} {}^tA_\lambda.$$

5. Déterminer la pseudo-inverse de la matrice :

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 3 \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

IMPRIMERIE NATIONALE